

Jak szukać ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych?

Rozważamy funkcję dwóch zmiennych

$$f(x, y).$$

Chcemy znaleźć jej ekstrema lokalne, czyli punkty, w których funkcja ma lokalne minimum albo lokalne maksimum.

1. Najpierw wyznacz dziedzinę

Zanim zaczniemy liczyć pochodne, trzeba ustalić, dla jakich punktów (x, y) funkcja jest w ogóle określona. Ekstrema można badać tylko w obrębie dziedziny funkcji.

Jeżeli funkcja jest określona na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , ten krok jest prosty. Jeżeli jednak w funkcji występują mianowniki, logarytmy albo pierwiastki, to najpierw trzeba uwzględnić warunki określoności.

2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Następnie liczymy pochodne cząstkowe

$$f_x(x, y), \quad f_y(x, y).$$

Są one odpowiednikami pochodnej $f'(x)$ znanej z funkcji jednej zmiennej.

Jeżeli punkt (x_0, y_0) jest ekstremum lokalnym i leży we wnętrzu dziedziny, to musi spełniać warunek

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Inaczej mówiąc, trzeba rozwiązać układ

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

Rozwiązania tego układu nazywamy **punktami krytycznymi**.

3. Rozwiąż układ równań $f_x = 0$, $f_y = 0$

To zwykle jest najważniejszy rachunkowo etap.

W praktyce przy rozwiązywaniu układu warto:

- wyłączać wspólne czynniki,
- rozbijać zadanie na przypadki,
- korzystać z podstawień,
- zauważać, które czynniki nigdy nie są równe zeru.

Na przykład, jeśli w obu pochodnych występuje czynnik

$$e^{g(x,y)},$$

to można go pominąć, ponieważ dla wszystkich (x, y) zachodzi

$$e^{g(x,y)} > 0.$$

Taki czynnik nie wpływa więc na miejsca zerowe pochodnych.

4. Po znalezieniu punktów krytycznych oblicz pochodne drugiego rzędu

Samo znalezienie punktów krytycznych jeszcze nie oznacza, że znaleźliśmy ekstrema. Punkt krytyczny może być:

- minimum lokalnym,
- maksimum lokalnym,
- punktem siodłowym.

Aby rozstrzygnąć, z którym przypadkiem mamy do czynienia, liczymy pochodne drugiego rzędu:

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{xy}(x, y), \quad f_{yy}(x, y).$$

Z tych pochodnych budujemy macierz

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

którą nazywamy **macierzą Hesjana** funkcji f .

Jeżeli funkcja ma ciągle pochodne drugiego rzędu, to zachodzi równość

$$f_{xy} = f_{yx},$$

więc Hesjan ma postać symetryczną:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Hesjan opisuje zachowanie funkcji w drugim przybliżeniu, to znaczy mówi nam, jaki jest lokalny “kształt” funkcji w pobliżu punktu krytycznego. Dla funkcji jednej zmiennej rolę tę odgrywa druga pochodna $f''(x)$:

- jeśli $f''(x_0) > 0$, to funkcja jest lokalnie “wygięta do góry” i mamy minimum,
- jeśli $f''(x_0) < 0$, to funkcja jest lokalnie “wygięta do dołu” i mamy maksimum.

W przypadku funkcji dwóch zmiennych sama jedna liczba już nie wystarcza, ponieważ funkcja może zachowywać się inaczej w różnych kierunkach. Dlatego zamiast jednej drugiej pochodnej badamy macierz Hesjana.

W praktyce najczęściej liczymy nie cały Hesjan od strony algebraicznej, lecz jego wyznacznik

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2.$$

Jest to wyznacznik macierzy Hesjana. Dzięki niemu możemy stwierdzić, czy Hesjan jest dodatnio określony, ujemnie określony czy nieokreślony. To właśnie decyduje o tym, czy punkt krytyczny jest minimum, maksimum czy punktem siodłowym.

5. Zastosuj kryterium drugich pochodnych

Dla punktu krytycznego (x_0, y_0) obowiązują następujące reguły:

- Jeżeli

$$D(x_0, y_0) > 0 \quad \text{oraz} \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$

to punkt (x_0, y_0) jest **minimum lokalnym**.

- Jeżeli

$$D(x_0, y_0) > 0 \quad \text{oraz} \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

to punkt (x_0, y_0) jest **maksimum lokalnym**.

- Jeżeli

$$D(x_0, y_0) < 0,$$

to punkt (x_0, y_0) jest **punktem siodłowym**.

- Jeżeli

$$D(x_0, y_0) = 0,$$

to test jest **nierozstrzygający**.

6. Co zrobić, gdy $D = 0$?

To jest bardzo ważny przypadek. Jeżeli

$$D(x_0, y_0) = 0,$$

to nie wolno zgadywać, czy punkt jest maksimum, minimum czy siodłem. Trzeba zbadać funkcję inną metodą.

Najczęściej robi się jedną z następujących rzeczy:

- bada się znak funkcji na prostych przechodzących przez badany punkt, na przykład

$$y = 0, \quad x = 0, \quad y = mx,$$

- bada się funkcję na innych krzywych przechodzących przez punkt,
- sprawdza się, czy w dowolnie małym otoczeniu punktu funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

Jeżeli w każdym otoczeniu punktu funkcja przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, to punkt jest **siodłowy**.

7. Jak to wygląda na przykładzie?

Rozważmy funkcję

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{x+2y}.$$

Krok 1. Dziedziną jest całe \mathbb{R}^2 , ponieważ wielomian i funkcja wykładnicza są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Krok 2. Liczymy pochodne pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}f_x &= e^{x+2y}(2x + x^2 - y^2), \\f_y &= e^{x+2y}(-2y + 2x^2 - 2y^2).\end{aligned}$$

Krok 3. Szukamy punktów krytycznych z układu

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

Ponieważ

$$e^{x+2y} > 0$$

dla wszystkich (x, y) , układ upraszcza się do

$$\begin{aligned}2x + x^2 - y^2 &= 0, \\-2y + 2x^2 - 2y^2 &= 0.\end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy punkty krytyczne

$$(0, 0), \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

Krok 4. Liczymy pochodne drugiego rzędu i Hesjan.

Dla wygody oznaczmy

$$E = e^{x+2y}.$$

Wtedy

$$f_x = E(2x + x^2 - y^2), \quad f_y = E(-2y + 2x^2 - 2y^2).$$

Liczymy kolejne pochodne:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E(2x + x^2 - y^2) \right) = E(2x + x^2 - y^2) + E(2 + 2x),$$

czyli

$$f_{xx} = E(x^2 + 4x + 2 - y^2).$$

Dalej

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(E(2x + x^2 - y^2) \right) = 2E(2x + x^2 - y^2) + E(-2y),$$

a więc

$$f_{xy} = E(2x^2 + 4x - 2y^2 - 2y).$$

Teraz

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(E(-2y + 2x^2 - 2y^2) \right) = 2E(-2y + 2x^2 - 2y^2) + E(-2 - 4y),$$

stąd

$$f_{yy} = E(4x^2 - 4y^2 - 8y - 2).$$

Zatem Hesjan ma postać

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} E(x^2 + 4x + 2 - y^2) & E(2x^2 + 4x - 2y^2 - 2y) \\ E(2x^2 + 4x - 2y^2 - 2y) & E(4x^2 - 4y^2 - 8y - 2) \end{pmatrix}.$$

Punkt $(0, 0)$. Najpierw obliczamy

$$E = e^{0+0} = 1.$$

Podstawiamy do wzorów:

$$f_{xx}(0, 0) = 1 \cdot (0 + 0 + 2 - 0) = 2,$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1 \cdot (0 + 0 - 0 - 0) = 0,$$

$$f_{yy}(0, 0) = 1 \cdot (0 - 0 - 0 - 2) = -2.$$

Wyznacznik Hesyjana w punkcie $(0, 0)$ wynosi

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4.$$

Ponieważ

$$D(0, 0) < 0,$$

punkt

$$(0, 0)$$

jest **punktem siodłowym**.

Punkt $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Najpierw obliczamy

$$E = e^{x+2y} = e^{\frac{2}{3} - \frac{8}{3}} = e^{-2}.$$

Następnie:

$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = e^{-2} \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{3} + 2 - \frac{16}{9}\right) = e^{-2} \left(\frac{4 + 24 + 18 - 16}{9}\right) = \frac{10}{3}e^{-2},$$

$$f_{xy}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = e^{-2} \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{3} - \frac{32}{9} + \frac{8}{3}\right) = e^{-2} \left(\frac{8 + 24 - 32 + 24}{9}\right) = \frac{8}{3}e^{-2},$$

$$f_{yy}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = e^{-2} \left(\frac{16}{9} - \frac{64}{9} + \frac{32}{3} - 2\right) = e^{-2} \left(\frac{16 - 64 + 96 - 18}{9}\right) = \frac{10}{3}e^{-2}.$$

Wyznacznik Hesyjana w tym punkcie wynosi

$$D\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \left(\frac{10}{3}e^{-2}\right) \left(\frac{10}{3}e^{-2}\right) - \left(\frac{8}{3}e^{-2}\right)^2.$$

Po uproszczeniu:

$$D\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{100}{9}e^{-4} - \frac{64}{9}e^{-4} = \frac{36}{9}e^{-4} = 4e^{-4} > 0.$$

Ponieważ dodatkowo

$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}e^{-2} > 0,$$

punkt

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

jest **minimum lokalnym**.

8. Schemat do zapamiętania

W zadaniach o ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych warto stosować następujący schemat:

1. Wyznacz dziedzinę funkcji.

2. Oblicz pochodne f_x, f_y .

3. Rozwiąż układ $f_x = 0, f_y = 0$.

4. Oblicz pochodne f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} .

5. Ułóż Hesjan i policz $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

$D > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow$ minimum lokalne,
 $D > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow$ maksimum lokalne,
 $D < 0 \Rightarrow$ punkt siodłowy,
 $D = 0 \Rightarrow$ test nierozstrzygający.

6. Gdy $D = 0$, zbadaj znak funkcji w pobliżu punktu.

9. Uwaga końcowa

Najczęstszy błąd polega na tym, że znajdujemy punkt krytyczny i od razu uznajemy go za ekstremum. Tak robić nie wolno.

Warunek

$$f_x = 0, \quad f_y = 0$$

jest tylko warunkiem koniecznym. Dopiero badanie drugich pochodnych albo analiza znaku funkcji pozwala rozstrzygnąć, czy punkt krytyczny jest minimum, maksimum czy punktem siodłowym.