Granice iterowane i badanie po ścieżkach

Badanie granic iterowanych i badanie po ścieżkach najlepiej traktować jako **narzędzia do wykrywania nieistnienia granicy**, a nie jako uniwersalną metodę dowodzenia, że granica istnieje.

1. Co dają granice iterowane

Dla funkcji $f(x,y)$ w punkcie (a,b) można rozważyć granice iterowane

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

Jeśli te dwie granice są różne, to od razu wiadomo, że granica właściwa

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

nie istnieje.

Jest to więc bardzo silne narzędzie do obalania istnienia granicy.

Trzeba jednak pamiętać o ważnym zastrzeżeniu: **równość granic iterowanych nie dowodzi jeszcze istnienia granicy właściwej.**

Przykład. Rozważmy funkcję

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Obie granice iterowane w punkcie $(0,0)$ są równe 0, ale po ścieżce

$$y=x$$

otrzymujemy

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

To pokazuje, że granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nie istnieje.

2. Po co bada się ścieżki

Badanie po ścieżkach służy głównie do wykazania, że granica nie istnieje.

Jeżeli granica

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

istnieje, to po **każdej** ścieżce prowadzącej do punktu (a,b) wartość funkcji musi dążyć do tej samej liczby L.

Zatem jeśli znajdziemy:

- dwie ścieżki dające dwie różne granice, albo
- jedną ścieżkę, po której granica w ogóle nie istnieje,

to mamy pełny dowód, że granica właściwa nie istnieje.

3. Jak wybierać ścieżkę

Ścieżki nie powinny być wybierane całkiem losowo. Należy patrzeć na wzór funkcji i szukać takich podstawień, które upraszczają licznik albo mianownik.

Najpierw ścieżki najprostsze

Na początku warto zawsze sprawdzić:

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

To są najprostsze testy i często już one wystarczają do obalenia granicy.

Potem proste postaci $y = mx$

Jeżeli w liczniku i mianowniku występują wielomiany podobnych stopni, bardzo naturalnym wyborem jest podstawienie

$$y = mx.$$

Na przykład dla funkcji

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{lub} \qquad \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

warto sprawdzić rodzinę prostych $y = mx$.

Jeśli wynik zależy od parametru m, to granica nie istnieje.

Potem parabole i ścieżki potęgowe

Jeżeli w funkcji występują potęgi różnego rzędu, na przykład

$$x^2, \quad y^4, \quad x^4, \quad y^2, \quad x^2y,$$

to często dobrze jest dobrać ścieżkę w postaci

$$y = mx^k,$$

tak aby zrównać rzędy wyrażeń.

Przykład. Dla funkcji

$$\frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

dobrym wyborem jest

$$y = mx^2,$$

ponieważ wtedy

$$y^2 = m^2x^4,$$

czyli oba składniki mianownika mają ten sam rząd względem x.

To nie jest zgadywanie, lecz dopasowanie stopni.

Gdy są moduły, pierwiastki lub dziwne kombinacje

W takich sytuacjach warto sprawdzać:

- ścieżki o różnych znakach, na przykład $y = x$ i $y = -x$,
- ścieżki zerujące fragment licznika,
- ścieżki upraszczające moduł albo pierwiastek.

Gdy funkcja ma postać radialną

Jeśli we wzorze często pojawia się wyrażenie

$$x^2 + y^2,$$

to warto rozważyć przejście do współrzędnych biegunowych:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

W wielu zadaniach jest to metoda lepsza niż zgadywanie kolejnych ścieżek.

4. Kiedy skończyć badanie ścieżek

To jest jedna z najważniejszych rzeczy.

Można skończyć natychmiast, gdy:

- znaleziono dwie ścieżki dające różne granice,
- znaleziono ścieżkę, po której granica nie istnieje,
- po podstawieniu $y = mx$ wynik zależy od parametru m.

W każdym z tych przypadków mamy już pełny dowód, że granica właściwa nie istnieje.

Nie wolno kończyć, gdy:

- sprawdzono kilka ścieżek i wszędzie wyszedł ten sam wynik.

To **nie dowodzi**, że granica istnieje.
Oznacza tylko tyle, że sprawdzone ścieżki nie wykazały jeszcze problemu.

5. Jak dowodzić, że granica istnieje

Badanie po ścieżkach zazwyczaj nie wystarcza do dowodzenia istnienia granicy. Do tego zwykle potrzebna jest jedna z następujących metod:

- oszacowanie:
$$|f(x,y)| \le g(x,y), \qquad g(x,y) \to 0,$$
- współrzędne biegunowe,
- twierdzenie o trzech funkcjach,
- wykorzystanie normy, na przykład $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$,
- odpowiednie przekształcenia algebraiczne.

Przykład. Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Można ją oszacować następująco:

$$x^2y^2 \le (x^2+y^2)^2.$$

Po podzieleniu przez $x^2+y^2 > 0$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ dostajemy

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2.$$

Ponieważ

$$x^2+y^2 \to 0 \qquad \text{dla } (x,y) \to (0,0),$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \to 0.$$

To jest poprawny dowód istnienia granicy.

6. Dlaczego przejście do współrzędnych biegunowych może wystarczać

Załóżmy, że badamy granicę funkcji w punkcie $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Wprowadzamy współrzędne biegunowe:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

gdzie

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ge 0.$$

Najważniejsza obserwacja jest taka, że warunek

$$(x,y) \to (0,0)$$

jest równoważny warunkowi

$$r \to 0.$$

Zmienna r mówi nam, jak blisko punktu $(0,0)$ jesteśmy, a kąt φ opisuje kierunek dochodzenia do tego punktu. Dlatego zapis biegunowy obejmuje jednocześnie wszystkie możliwe kierunki, a więc znacznie więcej niż kilka wybranych ścieżek typu $y=0$, $x=0$ czy $y=mx$.

Samo przejście do biegunowych nie wystarcza jeszcze automatycznie. Jest ono wystarczające wtedy, gdy po podstawieniu uda się uzyskać oszacowanie niezależne od kąta φ.

Najczęściej wygląda to tak, że po podstawieniu dostajemy

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^\alpha g(\varphi),$$

gdzie $\alpha > 0$, a funkcja $g(\varphi)$ jest ograniczona.

Jeżeli istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla każdego φ

$$|g(\varphi)| \leq M,$$

to otrzymujemy

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \leq Mr^{\alpha}.$$

Ponieważ

$$r^{\alpha} \to 0 \qquad \text{dla } r \to 0,$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika

$$f(x,y) \to 0.$$

To właśnie jest powód, dla którego metoda biegunowa może być wystarczająca: pozwala kontrolować zachowanie funkcji jednocześnie dla wszystkich kierunków dochodzenia do zera.

Przykład, gdy biegunowe działają. Rozważmy jeszcze raz funkcję

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Po przejściu do biegunowych:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

dostajemy

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2} = r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Stąd

$$|f(x,y)| \leq r^2,$$

bo

$$0 \leq \cos^2\varphi\sin^2\varphi \leq 1.$$

A więc

$$f(x,y) \to 0.$$

Przykład, gdy biegunowe pokazują brak granicy. Dla funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

po podstawieniu dostajemy

$$f(x,y) = \frac{(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)}{r^2} = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Tutaj po uproszczeniu zniknęło r, a wynik zależy tylko od kąta φ. To znaczy, że wartość funkcji zależy od kierunku dochodzenia do zera, więc granica nie istnieje.

Najważniejsze zdanie do zapamiętania jest więc takie:

> Przejście do współrzędnych biegunowych jest wystarczające wtedy, gdy po podstawieniu da się oszacować funkcję przez wyrażenie zależne tylko od r, które dąży do zera dla $r \to 0$.

7. Praktyczny schemat

Jeżeli masz granicę w punkcie $(0,0)$, można postępować według następującego schematu.

Krok 1: Sprawdź najprostsze ścieżki:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

Krok 2: Jeśli to nie wystarcza, sprawdź rodzinę prostych:

$$y = mx.$$

Krok 3: Jeśli w funkcji pojawiają się nierówne stopnie, dobierz ścieżkę typu

$$y = mx^k$$

tak, aby zrównać rzędy wyrażeń.

Krok 4: Jeśli po kilku ścieżkach wciąż wychodzi to samo, zadaj sobie pytanie:

- czy da się przejść do biegunowych?
- czy da się znaleźć dobre oszacowanie?

Krok 5: Jeśli po ścieżkach wszędzie wychodzi ta sama liczba, nie należy pisać:

„zatem granica istnieje”.

To byłby błąd.

Poprawnie można napisać:

> Sprawdzone ścieżki sugerują, że granica może być równa L, ale do ścisłego dowodu potrzebne jest oszacowanie albo przejście do współrzędnych biegunowych.

8. Dobra intuicja: co wybierać

W praktyce warto patrzeć na dominujące wyrażenia.

- Jeśli pojawia się $x^2 + y^2$, warto sprawdzać proste i biegunowe.
- Jeśli pojawia się $x^4 + y^2$, warto testować
$$y = mx^2.$$
- Jeśli pojawia się $x^6 + y^3$, również warto testować
$$y = mx^2,$$
bo wtedy
$$y^3 \sim x^6.$$
- Jeśli pojawiają się moduły, warto badać ścieżki o różnych znakach.
- Jeśli licznik zeruje się na pewnej krzywej, dobrze jest sprawdzić właśnie tę krzywą.

Ścieżki i granice iterowane są świetne do obalania granicy, ale do dowodzenia istnienia granicy zwykle potrzeba oszacowania albo współrzędnych biegunowych.