

Wprowadzenie teoretyczne do Listy nr 3

Poniższe pojęcia stanowią teoretyczne podstawy do rozwiązywania zadań z listy. Najważniejsze idee dotyczą granic funkcji wielu zmiennych, ciągłości odwzorowań wektorowych, własności operatorów liniowych oraz nierówności Cauchy’ego–Schwarza. Dla każdego działu podajemy też krótkie przykłady.

Ściąga: metody badania granic w $\mathbb{R}^2$

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i badamy granicę w punkcie (a, b) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y).$$

Poniżej cztery najczęściej używane techniki.

1) Granice iterowane (szybki test na brak granicy)

Liczymy granice “po kolei”:

$$L_{xy} = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right), \quad L_{yx} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right).$$

- Jeżeli $L_{xy} \neq L_{yx}$, to granica właściwa **nie istnieje**.
- Jeżeli $L_{xy} = L_{yx}$, to **to jeszcze nic nie gwarantuje** (trzeba sprawdzić inne ścieżki).

Przykład (różne granice iterowane). Niech

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0.$$

Tu akurat granice iterowane są takie same, więc test iterowany *nie rozstrzyga*. Wtedy przechodzimy do metody ścieżek (poniżej) i sprawdzamy np. $y = x$:

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0,$$

czyli granica właściwa **nie istnieje** mimo zgodnych granic iterowanych.

2) Ścieżki (proste) typu $y - b = k(x - a)$

To najprostszy sposób na wykazanie braku granicy. Podstawiamy

$$y = b + k(x - a)$$

i liczymy granicę jednowymiarową:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, b + k(x - a)).$$

- Jeżeli wynik zależy od k , to granica **nie istnieje**.
- Warto sprawdzić $k = 0, 1, -1$ oraz czasem ścieżki nieliniowe (np. $y = x^2$).

Przykład (zależność od k). Dla funkcji

$$g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

po podstawieniu $y = kx$ mamy

$$g(x, kx) = \frac{x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1}{1 + k^2}.$$

Wartość zależy od k , więc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ nie istnieje.

3) Współrzędne biegunowe (gdy pojawia się $x^2 + y^2$)

Dla granic w $(0, 0)$ często korzystamy z podstawienia:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0,$$

gdzie $x^2 + y^2 = r^2$.

Przykład (typowe “ r · coś ograniczonego”). Niech

$$h(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}.$$

W biegunowych:

$$h(r, \varphi) = \frac{r^2}{r + 1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

4) Twierdzenie o trzech funkcjach (oszacowania)

Jeśli potrafimy znaleźć oszacowanie

$$|f(x, y)| \leq g(x, y)$$

oraz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0,$$

to wtedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0.$$

Przykład (z sinusem).

$$f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad |\sin(\cdot)| \leq 1,$$

więc

$$|f(x, y)| \leq |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Zatem granica wynosi 0.

1. Granice w $\mathbb{R}^2$: pułapka wielu ścieżek

W Analizie I badaliśmy granice funkcji jednej zmiennej. Do punktu na osi rzeczywistej można podejść tylko z dwóch stron: z lewej lub z prawej.

W przypadku funkcji wielu zmiennych sytuacja jest znacznie bardziej złożona. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ do punktu $(0, 0)$ można podejść na nieskończenie wiele sposobów: po prostej, po paraboli, po krzywej wykładniczej, a nawet po spirali.

Definicja (Heinego)

Niech $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mówimy, że

$$\lim_{v \rightarrow v_0} T(v) = w$$

jeżeli dla każdego ciągu punktów $v_n \rightarrow v_0$ zachodzi

$$T(v_n) \rightarrow w.$$

Granice iterowane

Często rozpatruje się tzw. granice iterowane:

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \left(\lim_{x_1 \rightarrow a_1} T(x_1, x_2) \right).$$

Zasada praktyczna

Jeżeli dwie granice iterowane dają różne wyniki, to granica funkcji w tym punkcie nie istnieje. Jednak zgodność granic iterowanych **nie gwarantuje** istnienia granicy właściwej — trzeba sprawdzić inne ścieżki.

2. Ciągłość odwzorowań wektorowych

Często pracujemy z funkcjami, które nie zwracają jednej liczby, lecz cały wektor.

Takie odwzorowanie ma postać

$$T(v) = (T_1(v), T_2(v), \dots, T_m(v)).$$

Przykład funkcji wektorowej

Niech $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$T(x, y) = (x^2 - y, \sin(xy)).$$

Dla punktu (x, y) funkcja zwraca *dwie liczby naraz*, czyli wektor w $\mathbb{R}^2$.

Inny częsty przykład (funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$):

$$S(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Taka funkcja opisuje np. powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ jako wykres.

Twierdzenie o składowych

Odwzorowanie

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

jest ciągłe w punkcie v_0 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji składowych T_i jest ciągła w tym punkcie:

$$T \text{ ciągłe w } v_0 \iff T_i \text{ ciągłe w } v_0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Przykład zastosowania. Dla $T(x, y) = (x^2 - y, \sin(xy))$: funkcja $x^2 - y$ jest ciągła (wielomian), a $\sin(xy)$ jest ciągła (złożenie funkcji ciągłych), więc całe T jest ciągłe w każdym punkcie.

3. Przestrzenie operatorów i brak ciągłości

Na wyższym poziomie analizy funkcje traktujemy jako elementy przestrzeni wektorowej (tzw. przestrzeni funkcyjnej). W takiej przestrzeni operacje na funkcjach (np. różniczkowanie) traktujemy jako odwzorowania (operatory).

Przykład przestrzeni funkcyjnej

Przykładowo:

$$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągłe}\}.$$

Elementem tej przestrzeni jest *cała funkcja* (np. $f(x) = x^2$), a nie pojedyncza liczba.

Operator liniowy

Odwzorowanie

$$A : V \rightarrow W$$

nazywamy liniowym, jeżeli

$$A(af + bg) = aA(f) + bA(g).$$

Przykład operatora liniowego. Operator całkowania

$$(If)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

jest liniowy, bo

$$I(af + bg) = aIf + bIg.$$

Norma operatorowa

Normę operatorową definiujemy jako

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|v\|=1} \|A(v)\|.$$

Interpretacja: to maksymalne “wzmocnienie” wektora jednostkowego przez operator.

Ważna obserwacja: liniowość $\neq$ ciągłość

W przestrzeniach nieskończenie wymiarowych liniowość operatora nie gwarantuje jego ciągłości. Przykładem jest operator różniczkowania.

Rozważmy ciąg funkcji

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

W normie supremum na $[0, 2\pi]$:

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

czyli $f_n \rightarrow 0$.

Jednak pochodne to

$$f'_n(x) = \cos(nx), \quad \|f'_n\|_\infty = 1.$$

Zatem

$$f_n \rightarrow 0, \quad f'_n \not\rightarrow 0,$$

co pokazuje, że operator pochodnej nie jest ciągły w tej normie.

4. Nierówność Cauchy'ego–Schwarza

Dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i w_i \right| \leq \|v\|_2 \|w\|_2.$$

Przykład

Weźmy $v = (1, 2)$ oraz $w = (3, -1)$. Wtedy

$$v \cdot w = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1, \quad |v \cdot w| = 1.$$

Z drugiej strony

$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \|w\|_2 = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$$

Zatem

$$|v \cdot w| = 1 \leq \sqrt{5}\sqrt{10} = \sqrt{50},$$

co zgadza się z nierównością Cauchy'ego–Schwarza.

Interpretacja geometryczna

Ponieważ

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta,$$

nierówność Cauchy'ego–Schwarza oznacza, że

$$|\cos \theta| \leq 1,$$

czyli cosinus kąta między wektorami zawsze leży w przedziale $[-1, 1]$.