

Wprowadzenie teoretyczne do Listy nr 2

1. Przejście do wielu wymiarów: zasada współrzędnych

W Analizie I pracowaliśmy na liczbach rzeczywistych. W Analizie II przechodzimy do przestrzeni euklidesowej

$$E^k \cong \mathbb{R}^k,$$

czyli np. do płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ lub przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Elementem tej przestrzeni jest wektor

$$v = (x_1, \dots, x_k).$$

Zbieżność ciągów wektorów (Zadanie 1)

Ciąg wektorów v_n zbiega do wektora v , jeżeli

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^k$ norma euklidesowa ma postać:

$$\|v_n - v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_{n,i} - x_i)^2}.$$

Najważniejsza informacja praktyczna:

$$v_n \rightarrow v \iff x_{n,i} \rightarrow x_i \text{ dla każdego } i.$$

Oznacza to, że zbieżność w przestrzeni wielowymiarowej sprowadza się do zbieżności każdej współrzędnej osobno.

Przykład: ciąg punktów (x_n, y_n) zbiega do (x, y) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_n \rightarrow x \quad \text{oraz} \quad y_n \rightarrow y.$$

Ciągłość krzywych (Zadanie 2)

Krzywa

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t))$$

jest funkcją rysującą ścieżkę w przestrzeni.

Jest ona ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja składowa $\gamma_i(t)$ jest ciągła.

Czyli:

$$\gamma \text{ ciągła} \iff \gamma_1, \dots, \gamma_k \text{ ciągłe.}$$

Wielowymiarowość nie komplikuje definicji — wszystko redukuje się do jednowymiarowej analizy.

2. Zbieżność funkcji: punktowa a jednostajna

Mamy ciąg funkcji $f_n(x)$ i badamy jego granicę.

Zbieżność punktowa (Zadanie 4)

Dla ustalonego punktu x badamy granicę:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Każdy punkt analizujemy osobno. Indeks N w definicji zbieżności może zależeć od punktu x .

Zbieżność jednostajna

Jest to pojęcie silniejsze.

Definicja:

$$f_n \Rightarrow f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

gdzie

$$\|h\|_\infty = \sup_{x \in D} |h(x)|.$$

Interpretacja geometryczna:

Nie badamy punktów osobno, lecz cały wykres naraz.

Zbieżność jednostajna oznacza, że maksymalna odległość między wykresem f_n a wykresem f dąży do zera.

Dlaczego to takie ważne?

Kluczowe twierdzenie:

Jeżeli f_n są ciągłe i $f_n \Rightarrow f$, to funkcja graniczna f jest ciągła.

Wniosek praktyczny:

Jeżeli policzymy granicę punktową i okaże się ona nieciągła, to zbieżność nie była jednostajna.

To jest bardzo często wykorzystywane w Zadaniu 4.

3. Szeregi potęgowe: “wielomiany nieskończone”

Szereg potęgowy ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Można go traktować jako wielomian o nieskończonej liczbie wyrazów.

Promień zbieżności R (Zadanie 5)

Istnieje liczba $R \geq 0$ taka, że:

- dla $|x| < R$ szereg jest zbieżny bezwzględnie,
- dla $|x| > R$ jest rozbieżny.

Promień zbieżności obliczamy ze wzoru Cauchy’ego–Hadamarda:

$$R = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Różniczkowanie i całkowanie wyraz po wyrazie (Zadania 6, 7, 8)

Najważniejsza własność:

Wewnątrz przedziału zbieżności wolno różniczkować i całkować wyraz po wyrazie:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

To jest potężne narzędzie obliczeniowe.

Przykład praktyczny (Zadanie 8)

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$$

której nie da się obliczyć elementarnie.

Rozwijamy funkcję w szereg Taylora:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Dzielimy przez x :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Następnie całkujemy wyraz po wyrazie. Otrzymujemy szereg liczbowy, którego częściowe sumy pozwalają uzyskać wynik z dowolną dokładnością.

Uwaga praktyczna (dokładność 0,0001)

W zadaniu 8 występuje szereg naprzemienny o malejących wyrazach.

Z kryterium Leibniza wynika, że błąd przybliżenia jest mniejszy niż pierwszy pominięty wyraz.

Dlatego w praktyce wystarczy sumować kolejne wyrazy, aż następny wyraz będzie mniejszy niż wymagana dokładność.